Tentamen Signalen en Systemen

11 november 2004, 9.00–12.00

□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□

Belangrijke punten:

- U bent verplicht om uw collegekaart tijdens de tentamen mede te nemen.
- Schrijf zo netjes mogelijk met een pen of vulpen (geen potlood).
- Vul de kop van het eerste blad volledig in.
- Nummer de bladen en zet bovenaan het eerste blad het totaal aantal ingeleverde bladen en voorzie ieder blad van uw naam.
- Schrijf uw naam op de envelop. Na afloop van de toets doet u uw werk in de envelop en levert deze in. Plak deze envelop niet dicht.
- Lees de opgaven eerst rustig door.
- Besteed niet te veel tijd aan een enkele opgave.
- Het gewicht van iedere opgave is in procenten vermeld. De som der gewichten bedraagt 105%; voor de maximale voldoende hoeft slechts 100% correct te worden beantwoord.
- Bij het tentamen hoort een formuleblad.

– – SUCCES – –

Opgave 1: (20%)

1. We reizen 's nachts in een hel met TL-buizen verlichte trein en kijken mijmerend door het raam naar buiten. Via het raam wordt in de donkere nacht een klein stukje van het belende spoor verlicht. Alhoewel de trein met een behoorlijke snelheid door de nacht voort raast, lijkt het wel of de trein ten opzichte van het belendende spoor stil staat. We vragen ons stilletjes af, hoe hard rijdt de trein?

   De TL-buizen knipperen ten gevolge van de lichtnetfrequentie met een frequentie van 100 Hz. De spoorbreedte is 1435 mm. Er worden 2 dwarsliggers per strekkende meter aangebracht. Een dwarsligger is 25 cm breed en 200 cm lang. De tussen ruimte tussen de dwarsliggers is derhalve 25 cm.

   Bepaal de mogelijke snelheden van de trein uitgedrukt in km/h.
2. In de trein zijn filmopmanen gemaakt. Deze filmopnamen zijn volledig mislukt. Als we de beeldjes van de film bekijken dan zien we dat de beeldjes in helderheid variëren. De helderste beeltjes lijken met een zekere regelmaat terug te keren. Een profesionele filmcamera neemt op met 24 beeldjes per seconde.

   Verklaar dit fenomeen en bepaal de kortste afstand (gemeten in beeldjes) tussen twee beeldjes met maximale helderheid.

Opgave 2: (25%)

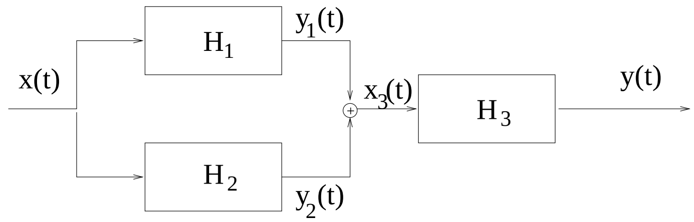
Een bijzondere categorie van filter zijn de filters met een symmetrische impulsrepspons; het volgende filter heeft zo een symmetrische impulsrespons:

$$h[n] = \delta[n] + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ (\delta[n-k] + \delta[n+k])$$

1. Bepaal een algemene uitdrukking voor de versterking (gain) als functie van de genormeerde hoekfrequentie $\left|H(e^{j\hat{\omega}})\right|$ voor dit type filter.
2. Bepaal een algemene uitdrukking voor de faseverschuiving als functie van de genormeeerde hoekfrequentie $\angle H(e^{j\hat{\omega}})$ voor dit type filter.
3. We gaan uit van het filter met impulsresponse $h[n] = \frac{1}{2}\delta[n-1] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n+1]$. Bepaal de output van het filter bij gegeven input:

$$x[n] = 1 + 0.4cos(\frac{\pi}{3}n) + 0.7cos(\frac{\pi}{2}n)$$

Opgave 3: (30%)
We beschouwen het volgende filternetwerk van tijddiscrete filters:



De systeemfuncties van de filters zijn:

$$H_1(z) = \frac{1}{2 + z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{-1}{3 + z^{-1}}$$

$$H_3(z) = 6 + 5z^{-1} + z^{-2}$$

1. Bepaal de differentievergelijking voor het filter met filterfunctie $H_1(z)$.
2. Bepaal de gelijkstroomversterking (DC-amplification) van het filter met filterfunctie $H_1(z)$.
3. Bepaal impulsrespons $h_1[n]$ voor $n \in \mathbb{Z}$ voor het filter met filterfunctie $H_1(z)$.
4. Bepaal van ieder van de drie filters of ze causaal zijn.
5. Bepaal van ieder van de drie filters of ze een eindige impulsresponse (finite impulse response) bezitten.
6. Het gegeven filternetwerk is te vervangen door slechts één filter. Bepaal de filterfunctie $H(z)$ van dit vervangende filter.

Opgave 4: (30%)

Beschouw de fysica van een vioolsnaar die wordt beschreven door de differentiaalvergelijking:

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + \lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + ky(t) = x(t)$$

Hierbij is m de effectieve massa van de snaar, k de veerconstante van de snaar, λ de demping van de snaar, $y(t)$ de uitwijking van de snaar als functie van de tijd en $x(t)$ de kracht op de snaar als functie van de tijd uitgeoefend door de strijkstok. We kunnen de vioolsnaar interpreteren als een filter waarbij de kracht op de snaar x wordt afgebeeld op de uitwijking van de snaar y.

1. Aan welke voorwaarden moet het systeem de vioolsnaar voldoen, wil het een Lineair Tijd-Invariant (LTI)-systeem zijn.
2. Bewijs met behulp van de differentiaalvergelijking dat de vioolsnaar een LTI-systeem is.
3. Bepaal de orde van het filter waarmede de vioolsnaar gemodelleerd wordt.
4. Bepaal de overdrachtfunctie (system function) $H(s)$ van de vioolsnaar.
5. Bepaal de resonantiefrequentie van de snaar als functie van de eigenschappen van de snaar voor een ongedempte snaar ($\lambda = 0$); dat wil zeggen die frequentie waarvoor de absolute waarde van overdrachtsfunctie $H(j\omega)$ een maximum bereikt.
6. Bewijs dat de modulus van de overdrachtsfunctie gelijk is aan

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{((k - m\omega^2)^2) + (\lambda^2\omega^2)}}$$

7. Beargumenteer waarom de constante λ de demping wordt genoemd. Beschouw hiervoor de versterking (gain) voor de resonantiefrequentie.

Opgave 1:

1. De afstand tussen twee dwarsliggers is 0,5 m. Het spoor lijkt stil te staan omdat tijdens een knippercyclus van de TL-balken er precies een veelvoud van de afstand tussen de dwarsliggers is afgelegd; $k \times 0.5$ m. Aangezien de TL-balk knippert met 100 Hz, legt de trein $100k \times 0.5$ m/s af. Als we dit omrekenen naar kilometer per uur, dan komen we op $k \times 180$ km/h uit, waarbij k geheeltallig is.
2. Omdat de sluiter van de filmcamera en de knipperingen van de TL-buizen niet synchroon lopen, worden er opnames gemaakt voor, na en tijdens de gasontlading van de TL-buis. Dit verklaart de helderheidsverschillen tussen de beeldjes.De frequentie van deze cyclus komt overeen met de grootste gemene deler van 100 Hz en 24 Hz. Deze grootste gemene deler is 4 Hz. Een cyclus duurt derhalve 1/4 s en daarin worden 6 beeldjes gemaakt. de onderlinge afstand tussen twee heldere beeljes is dus 6 beeldjes.

Opgave 2:

1. De systeemfunctie luidt:

$$H(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z^k + z^{-k})$$

Hierin substitueren we $z = e^{j\hat{\omega}}$ en vinden

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k cos(\hat{\omega}k)$$

De modulus van de overdrachtsfunctie is de versterking en is gelijk aan $H(e^{j\hat{\omega}})$, immers de overdrachtsfunctie is zuiver reëel.
2. Omdat de overdrachtsfunctie zuiver reëel is, is de faseverschuiving 0.
3. Voor het bedoelde filter geldt:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = 1 + cos\hat{\omega}$$

De versterking kunnen we nu uitrekenen $H(e^0) = 2$, $H(e^{\pi/3}) = 1\frac{1}{2}$ en $H(e^{\pi/2}) = 1$. De faseverschuiving is altijd 0 en speelt derhalve geen rol. De output is derhalve:

$$y[n] = 1 + 0.6cos(\frac{\pi}{3}n) + 0.7cos(\frac{\pi}{2}n)$$

Opgave 3:

1. De differentievergelijking volgt uit het substitueren van $H_1(z)$ in $y_1[n] = H_1(z)x[n]$. Na enig rekenwerk vinden we:

$$(2 + z^{-1})y_1[n] = x[n]$$

   Hieruit herleiden we de differentievergelijking:

$$y_1[n] = \frac{1}{2}(x[n] - y_1[n-1])$$

2. De gelijkstroomversterking volgt uit substitutie van $z = e^{j\hat{\omega}}$ met $\hat{\omega} = 0$ in $H_1(z)$. Omdat $z^0 = 1$ volgt $H_1(z) = \frac{1}{3}$.
3. We herschrijven $H_1(z)$ en passen een bekende reeksontwikkeling toe

$$H_1(z) = \frac{1}{2+z^{-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2} + \dots$$

   Ook met behulp van de differentievergelijking zijn de coëfficiënten gemakkelijk uit te rekenen. We bieden aan $x[n] = \delta[n]$ en beschouwen de impulsrespons $h_1[n] = y_1[n]$. Omdat het een causaal systeem is geldt $h_1[-3] = h_1[-2] = h_1[-1] = 0$. Vanaf nu moeten we rekenen:
   $h_1[0] = \frac{1}{2}(x[0] - y[-1]) = \frac{1}{2}$,
   $h_1[1] = \frac{1}{2}(x[1] - y[0]) = -\frac{1}{4}$,
   $h_1[2] = \frac{1}{2}(x[2] - y[1]) = \frac{1}{8}$ en
   $h_1[3] = \frac{1}{2}(x[3] - y[2]) = -\frac{1}{16}$
   Ongeacht de berekeningmethode:

$$h_1[n] = \left(\begin{array}{l} 0 \text{ voor } n < 0 \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ voor } n \geq 0 \end{array} \right.$$

4. Alle filters zijn causaal. Stel de differentievergelijking op en constateer dat $y[n]$ afhangt van uitsluitend $y[m]$ met $m < n$ en $x[m]$ met $m \leq n$. Je kan ook de impulsrespons opstellen en concluderen dat $h[n] = 0$ voor $n < 0$.
5. De filters 1 en 2 zijn recursief en hebben derhalve een oneindige impulsrespons. Filter 3 is een typisch FIR-filter met uitsluitend een polynoom in z in de noemer. Daarom heeft dit filter een eindige impulsrespons.
6. We berekenen $H(z) = (H_1(z) + H_2(z)) \cdot H_3(z)$.

$$H(z) = \left(\frac{1}{2+z^{-1}} + \frac{-1}{3+z^{-1}}\right)\left(6 + 5z^{-1} + z^{-2}\right)$$
$$H(z) = \frac{(3+z^{-1}) - (2+z^{-1})}{6+5z^{-1}+z^{-2}}\left(6 + 5z^{-1} + z^{-2}\right)$$
$$H(z) = \frac{1}{6+5z^{-1}+z^{-2}}\left(6 + 5z^{-1} + z^{-2}\right) = 1$$

Opgave 4:

1. Een LTI-systeem moet aan drie voorwaarden voldoen:
   - Lineariteit, productregel $y(t) = S(x(t)) \Longrightarrow \alpha y(t) = S(\alpha x(t))$

- Lineariteit, somregel $y_1(t) = S(x_1(t))$ en $y_2(t) = S(x_2(t)) \Longrightarrow y_1(t) + y_2(t) = S(x_1(t) + x_2(t))$
- Tranlatieinvariantie $y(t) = S(x(t)) \Longrightarrow \alpha y(t+\tau) = S(x(t+\tau))$

2. We bewijzen achtereenvolgens:
   - Lineariteit, productregel. Hiervoor substitueren we $\alpha y(t) \rightarrow y(t)$ en $\alpha x(t) \rightarrow x(t)$ in de differentiaalvergelijking.

     $$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\alpha y(t) + \lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha y(t) + k\alpha y(t) = \alpha x(t)$$

     De constanten α mogen we uitdelen en het resultaat is de oorspronkelijke differentiaal vergelijking.
   - Lineariteit, somregel. Hiervoor substitueren we $y_1(t) \rightarrow y(t)$ en $x_1(t) \rightarrow x(t)$ in de differentiaalvergelijking. Vervolgens herhalen we dit voor $y_2(t) \rightarrow y(t)$ en $x_2(t) \rightarrow x(t)$. Hierna kunnen we de twee differentiaalvergelijkingen optellen met als resultaat:

     $$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(y_1(t) + y_2(t)) + \lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y_1(t) + y_2(t)) + k(y_1(t) + y_2(t)) = \alpha(x_1(t) + x_2(t))$$

     Hiermede is bewezen dat de som van twee oplossingen ook leidt tot een oplossing van de differentiaal vergelijking
   - Tranlatieinvariantie. Hiervoor substitueren we $y(t+\tau) \rightarrow y(t)$ en $\alpha x(t+\tau) \rightarrow x(t)$ in de differentiaalvergelijking.

     $$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t+\tau) + \lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t+\tau) + ky(t+\tau) = x(t+\tau)$$

     Vervolgens substitueren we $t = t' - \tau$ zodat $dt' = dt$.

     $$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}y(t') + \lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}y(t') + ky(t') = x(t')$$

     Dit is weer de oorspronkelijke differentiaalvergelijking.
3. Het is een tweede orde differentiaalvergelijking; hieruit volgt dat het een tweede orde filter is.
4. Voor de systeemfunctie geldt $y(t) = H(s)x(t)$. The bepalen $H(s)$, waarbij $s = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Hiervoor herschrijven we de differentiaalvergelijking

   $$y(t) = \frac{1}{ms^2 + \lambda s + k}x(t)$$

   Hieruit volgt voor de systeemfuctie $H(s) = \dfrac{1}{ms^2 + \lambda s + k}$
5. Bij resonantie geldt dat de noemer van de overdrachtsfunctie in absolute waarde een minimum bereikt. Hiervoor moet gelden $ms^2 + k = 0$ waarbij $s = j\omega$. Hieruit volgt direct $\omega = \sqrt{k/m}$, ofwel $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$.
6. We substitueren in de systeemfunctie $s = j\omega$ en vinden de overdrachtsfunctie:

   $$H(j\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + j\lambda\omega + k}$$

   Tot slot bepalen we de modulus hiervan.

7. Voor de resonantiefrequentie geldt $k - m\omega^2 = 0$. De modulus van de overdrachtsfunctie reduceert tot

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\lambda}$$

We zien dat de versterking omgekeerd evenredig is aan de demping. Hoe groter de demping, hoe kleiner de versterking en omgekeerd.